1 Ort, Ortsverschiebung und Weg

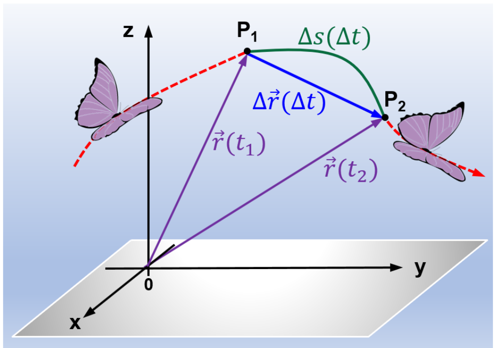
1.1 Ort

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{r}(t)$	Ort zum Zeitpunkt t in $\mathbb{R}^3$ (3-dimensionaler Raum)	m
$\lvert\vec{r}(t)\rvert$	Direkter Abstand zwischen Ort und Ursprung („Luftlinie“)	m
$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$	Ortskoordinaten zum Zeitpunkt t	m
t	Beliebiger Zeitpunkt t mit $t \geq 0$	s

1.2 Ortsverschiebung

Während sich ein Körper entlang der nicht geradlinigen Bahnkurve von P_1 nach P_2 bewegt, ändert er im Zeitintervall Δt seinen Ort um $\Delta\vec{r}$. Diese Ortsverschiebung ist ein Vektor, der vom Ort P_1 zum Ort P_2 zeigt. Sein Betrag gibt den direkten Abstand („Luftlinie“) zwischen beiden Orten an. Orte werden durch Ortsvektoren, hier $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$, beschrieben.
Der vom Körper auf der Bahnkurve zwischen den Orten zurückgelegte Weg, wird als Wegelement Δs bezeichnet und ist *kein* Vektor!

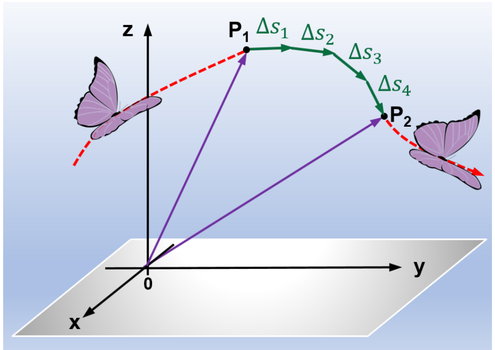


$$\Delta\vec{r}(\Delta t) = \Delta\vec{r}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\Delta\vec{r}(\Delta t), \Delta\vec{r}(t_1, t_2)$	Im Zeitintervall Δt erfolgte Ortsverschiebung (oft auch als Ortsänderung bezeichnet) mit $\Delta\vec{r}(\Delta t) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$	m
$\lvert\Delta\vec{r}(\Delta t)\rvert, \lvert\Delta\vec{r}(t_1, t_2)\rvert$	Direkter Abstand zwischen zwei Orten („Luftlinie“)	m
Δx, Δy, Δz	Im Zeitintervall Δt erfolgten unabhängigen Ortsverschiebungen in x-, y- und z-Richtung mit $\Delta x(\Delta t) = x(t_2) - x(t_1)$	m
t_1, t_2	Bestimmte Zeitpunkte mit $t_2 > t_1$	s
Δt	Beliebiges Zeitintervall mit $\Delta t = t_2 - t_1$	s

1.3 Weg

Um den Weg eines Körpers auf einer *nicht geradlinigen* Bahnkurve von P_1 nach P_2 zu ermitteln, wird dieser zunächst in kleine Wegelemente $\Delta s_i(\Delta t_i)$ zerlegt. Die einzelnen Wegelemente lassen sich dann als Betrag der einzelnen kleinen Ortsverschiebungen zwischen P_1 nach P_2 mit $\Delta s_i(\Delta t_i) \approx |\Delta \vec{r_i}(\Delta t_i)|$ errechnen.
Werden dann alle Wegelemente aufsummiert, ergibt sich der Gesamtweg $s_{\text{ges}}(t_{\text{ges}})$ zwischen P_1 und P_2.



$$\Delta s_i(\Delta t_i) \geq |\Delta \vec{r_i}(\Delta t_i)| \qquad s_{\text{ges}}(t_{\text{ges}}) \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i(\Delta t_i) \qquad t_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\Delta s_i(\Delta t_i)$	Wegelement auf der Bahnkurve zwischen P_1 und P_2	m
$\lvert\Delta \vec{r_i}(\Delta t_i)\rvert$	Ortsverschiebung zwischen zwei Orten auf der Bahnkurve	m
$s_{\text{ges}}(t_{\text{ges}})$	In t_{ges} zurückgelegter Gesamtweg mit $s_{\text{ges}}(t_0) = 0$	m
t_{ges}	Gesamtzeit mit $t_0 = 0$, Summe aller Zeitintervalle	s

2 Geschwindigkeit und Tempo

2.1 Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\vec{\bar{v}}(\Delta t) = \vec{\bar{v}}(t_1, t_2) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{pmatrix} \qquad |\vec{\bar{v}}(\Delta t)| = \sqrt{\bar{v}_x{}^2 + \bar{v}_y{}^2 + \bar{v}_z{}^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{\bar{v}}(\Delta t), \vec{\bar{v}}(t_1, t_2)$	Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt	m/s
$\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$	Durchschnittsgeschwindigkeit in Δt in x-, y- und z-Richtung	m/s
$\lvert\vec{\bar{v}}(\Delta t)\rvert$	Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt	m/s

2.2 Momentangeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right] = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}(t)| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{v}(t)$	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t mit $t > 0$	m/s
$v_x(t), v_y(t), v_z(t)$	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t in x-, y- und z-Richtung	m/s
$\lvert\vec{v}(t)\rvert$	Betrag der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t, entspricht dem Momentantempo: $\lvert\vec{v}(t)\rvert = u(t)$	m/s

2.2.1 Richtung der Momentangeschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| \cdot \vec{e}_v(t) \qquad \vec{e}_v(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|} \cdot \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{e}_v(t)$	Einheitsvektor in Richtung der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $\{\vec{e}_v(t)\} = 1$ und $[\vec{e}_v(t)] = 1$	1

2.3 Durchschnittstempo

$$\bar{u}(\Delta t) = \bar{u}(t_1, t_2) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \bar{u}(t_{\text{ges}}) = \frac{s_{\text{ges}}}{t_{\text{ges}}}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\bar{u}(\Delta t), \bar{u}(t_1, t_2)$	Durchschnittstempo im Zeitintervall Δt (Skalar)	m/s
$\bar{u}(t_{\text{ges}})$	Durchschnittstempo während der Gesamtzeit t_{ges}	m/s
s_{ges}	Gesamtweg auf der Bahnkurve mit $s_{\text{ges}}(t_0) = 0$	m
t_{ges}	Gesamtzeit der Bewegung mit $t_0 = 0$	s
Δs	Wegelement, das auf der Bahnkurve im Zeitintervall Δt zurückgelegt wurde	m
Δt	Zeitintervall mit $\Delta t = t_2 - t_1$	s

2.4 Momentantempo

$$u(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] \qquad u(t) = |\vec{v}(t)|$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$u(t)$	Momentantempo zum Zeitpunkt t (Tachowert)	m/s
$\|\vec{v}(t)\|$	Betrag der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t	m/s

3 Beschleunigung

3.1 Durchschnittsbeschleunigung

$$\vec{\bar{a}}(\Delta t) = \vec{\bar{a}}(t_1, t_2) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_x \\ \bar{a}_y \\ \bar{a}_z \end{pmatrix} \qquad |\vec{\bar{a}}(\Delta t)| = \sqrt{\bar{a}_x{}^2 + \bar{a}_y{}^2 + \bar{a}_z{}^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{\bar{a}}(\Delta t), \vec{\bar{a}}(t_1, t_2)$	Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt	m/s^2
$\Delta\vec{v}(\Delta t), \Delta\vec{v}(t_1, t_2)$	Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall Δt	m/s
$\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$	Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall Δt in x-, y- und z-Richtung	m/s
$\|\vec{\bar{a}}(\Delta t)\|$	Betrag der Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt	m/s^2
$\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$	Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt in x-, y- und z-Richtung	m/s^2

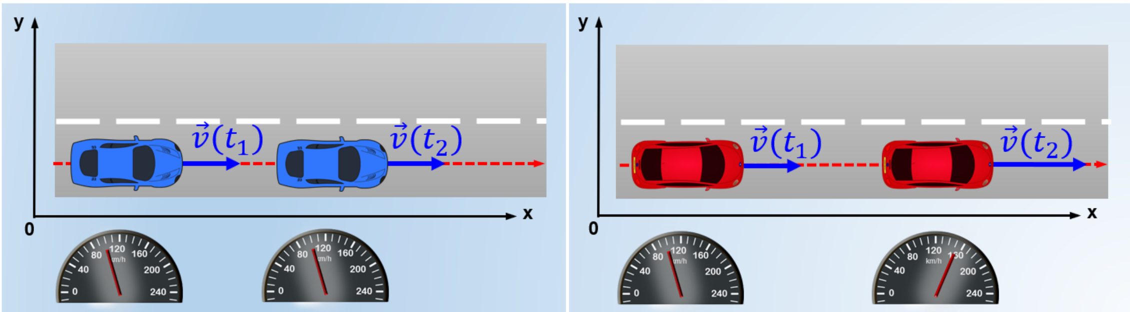
3.2 Momentanbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right] = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{a}(t)$	Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t	m/s^2
$a_x(t), a_y(t), a_z(t)$	Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t in x-, y- und z-Richtung	m/s^2
$\|\vec{a}(t)\|$	Betrag der Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t	m/s^2

4 Sonderfälle

Die folgende Abbildung zeigt links eine gleichförmige und rechts eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Bei gleichförmigen Bewegungen ändert sich die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ nicht, Betrag $|\vec{v}(t)|$ und Richtung $\vec{e}_v(t)$ bleiben konstant.
Bei gleichmäßig beschleunigten Bewegungen ändert sich das Tempo (Betrag der Geschwindigkeit) $u(t) = |\vec{v}(t)|$ gleichmäßig, also mit konstanter Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Bei beiden Sonderfällen sind die grundsätzlichen Strukturen ihre Bewegungsgleichungen bekannt.



4.1 Gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t + x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
$\vec{r}(t)$	Ort zum Zeitpunkt t in $\mathbb{R}^3$ (3-dimensionaler Raum)	m
x_0, y_0, z_0	Ortskoordinaten zum Zeitpunkt t_0	m
$\vec{v}(t)$	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t mit $t > 0$	m/s
v_{0x}	x-Komponente des Geschwindigkeitsvektors zum Zeitpunkt t_0	m/s
$\vec{a}(t)$	Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t	m/s^2
t	Beliebiger Zeitpunkt t mit $t \geq 0$	s

4.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 + v_{0x} \cdot t + x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_x \cdot t + v_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Größe	Bedeutung	Einheit
a_x	Konstante x-Komponente des Beschleunigungsvektors	m/s^2

5 Elemente der Vektoralgebra

5.1 Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{(Spaltenvektor)}, \qquad \vec{a}^{\,T} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{(Zeilenvektor)}$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a, \quad |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}, \quad \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{(Ortsvektor)}, \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{(Ortsfunktion)}$$

5.2 Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

5.3 Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

5.4 Quadrieren von Vektoren

$$\vec{a}^{\,2} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = |\vec{a}|^{\,2} = {a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2$$

5.5 Multiplikation von Skalar und Vektor

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{\vec{a}}{\lambda}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\lambda|}, \qquad |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, \qquad \frac{\vec{a}}{\lambda} \times \frac{\vec{b}}{\mu} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\lambda \cdot \mu}$$

5.6 Multiplikation von Vektoren - Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \;\; \rightarrow \;\; \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos(\alpha)| \;\; \rightarrow \;\; \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\text{Orthogonalität: } \vec{a} \perp \vec{b} \;\leftrightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\rightarrow\; \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \;\leftrightarrow\; \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

5.7 Multiplikation von Vektoren - Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \;\; \rightarrow \;\; |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\alpha)| \;\; \rightarrow \;\; \alpha = \arcsin\left(\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\text{Orthogonalität: } \vec{a} \perp \vec{b} \;\leftrightarrow\; |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \;\rightarrow\; \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \leftrightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1$$

5.8 Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$